МІНІСТЕРСЕВО ОСВІТИ І НАУК УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ
Кафедра математики та моделювання

Затверджую:
Декан факультету машинобудування
_______________ Валерій КАССОВ
«26» _червня___2023р.

Гарант освітньої програми:
Кандидат фіз.-мат. наук, доцент
_______________ Ольга РОВЕНСЬКА
«20» ___червня_____2023р.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри математики та моделювання
Протокол №16 від 20.06.2023р.
В.о. зав. кафедри
_______________ Ольга РОВЕНСЬКА

РОБОЧА ПРОГРАМА

«Теорія функцій»

галузь знань 01 Освіта/Педагогіка
спеціальність 014 Середня освіта (Математика)
ОПП (магістр) Математика
кваліфікація Магістр середньої освіти (математика). Вчитель математики та економіки.

Розробник: О.Г. Ровенська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Розроблено за підтримки громадської організації «Smart Maths»
http://formathematics.com/

2023-2024 навчальний рік

1. РОЗПОДІЛ ГОДИН

Форма навчання	Кредитів ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самост. робота	Розподіл за семестрами			
			Лекції	Практичні	Лабораторні	Всього		Екзамени	Заліки	ДЗ	Курсова робота
2 сем	**4,5**	**135**	**18/4**	**36/4**	–	**54/8**	**81/127**	+			
Всього	**4,5**	**135**	**18/4**	**36/4**	–	**54/8**	**81/127**	+			

2. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета вивчення дисципліни – формування когнітивних, афективних та психомоторних компетентностей в сфері навчання студентів функціональним методам, що є необхідними у дослідженні функціональних моделей, які формуються під час використання методів і засобів математичного аналізу для вирішення складних проблем незалежно від сфери діяльності, а також набуття навичок застосування цих компетентностей у професійній діяльності.

Курс суттєво розширює знання студентів про методи вивчення нескінченновимірних об’єктів, таких як множини і простори. З іншого боку, цей курс вводить студентів у світ сучасної математики, знайомлячи їх з основами теорії метричних лінійних просторів, які дістануть подальшого розвитку і продовження в теорії міри та інтегралу Лебега. Важливим є також ознайомлення з основними методами математичного аналізу, що використовуються у просторах сумовних функцій. У подальшому ці структури та їх перетворення знаходять численні застосування в економіці, теорії управління, кібернетиці, фінансовій математиці, екологічному та соціальному моделюванні тощо.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент має опанувати ***загальними компетентностями***:

-аналіз і синтез: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

-практична робота: розуміння предметної області та професійної діяльності, здатність застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід;

-творчість та інновації: здатність створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;

-інформаційні технології: засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;

-розвиток та самовдосконалення: здатність проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок;

фаховими компетентностями:

-фундаментальні знання та розуміння: здатність використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи;

-професійні навички: здатність застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу;

-вирішення проблем: здатність застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп’ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів;

-інформаційні освітні технології: здатність до використання сучасних методів навчання, пов’язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп’ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій;

-професійна комунікація: здатність спілкуватися державною та іноземною мовами у відповідності до професійної ситуації;

-академічна доброчесність: усвідомлення етичних та юридичних проблем використання інформаційних ресурсів, знання основ мережевого етикету;

-альтернативна освіта: здатність здійснювати аналіз та корекцію знань та умінь учнів в умовах диференційованого навчання, здатність ефективно планувати та організовувати різні форми неформальної освіти.

Завданнями вивчення дисципліни полягає у формуванні здатностей студентів до:

-математичного та логічного мислення, побудови і дослідження функціональних моделей; обґрунтованого вибору методів функціонального аналізу для розв’язування теоретичних і прикладних задач, що виникають під час використання методів і засобів математичного аналізу; інтерпретування отриманих результатів в різних предметних галузях (інформаційного, економічного призначення, тощо);

-формалізованого опису теоретичних і прикладних задач що виникають під час використання методів і засобів теорії функцій; доведення розв’язків завдань до практично прийнятних результатів (інтерпретація й оцінка якісних показників отриманого розв’язку);

-розв’язання екстремальних задач, отримання геометричних та фізичних характеристик процесів і явищ навколишнього середовища;

-залучення методів теорії функцій для підтвердження результатів, що отримані під час експерименту в наукових дослідженнях;

-формування навичок професійної комунікації й аргументованого диспутування з питань використання методів теорії функцій під час використання методів і засобів математичного аналізу для вирішення складних проблем незалежно від сфери діяльності в колі фахівців та нефахівців.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент має опанувати ***загальними компетентностями***:

-аналіз і синтез: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

-практична робота: розуміння предметної області та професійної діяльності, здатність застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід;

-творчість та інновації: здатність створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;

-інформаційні технології: засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;

-розвиток та самовдосконалення: здатність проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок;

фаховими компетентностями:

-фундаментальні знання та розуміння: здатність використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи;

-професійні навички: здатність застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу;

-вирішення проблем: здатність застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп’ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів;

-інформаційні освітні технології: здатність до використання сучасних методів навчання, пов’язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп’ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій;

-професійна комунікація: здатність спілкуватися державною та іноземною мовами у відповідності до професійної ситуації;

-академічна доброчесність: усвідомлення етичних та юридичних проблем використання інформаційних ресурсів, знання основ мережевого етикету;

-альтернативна освіта: здатність здійснювати аналіз та корекцію знань та умінь учнів в умовах диференційованого навчання, здатність ефективно планувати та організовувати різні форми неформальної освіти.

Попередніми умовами успішного вивчення курсу «Теорія функцій» є вивчення загальних та спеціальних дисциплін спеціальності, насамперед, володіння основами математичного аналізу, алгебри, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, математичної статистики, логіки.

Підвищенню ефективності вивчення курсу сприяє використання всесвітньої мережі Інтернет, різноманітних програмних засобів навчального призначення, бібліотек електронних наочностей, офісних і спеціалізованих пакетів (наприклад, MsOffice, Ms PowerPoint, MathCAD, MAPLE та інших).

3. РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

3.1 Тематика лекцій та практичних занять

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Тема 1. Метричні простори. Збіжність.
Означення і приклади метричних просторів.
Неперервні відображення
Збіжність. Кулі, обмежені множини, граничні точки.
Відкриті та замкнені множини.
Завдання до самостійної роботи: Відкриті та замкнені множини на прямій
Література: [2] с.15-29. [3] с. 23-33. [4] с. 47-53, [8] с. 3-9

Тема 2. Повні метричні простори. Компактність
Повнота і сепарабельність у метричних просторах.
Поповнення метричних просторів.
Компактні множини метричних просторів.
Властивості неперервних функцій на компакті.
Завдання до самостійної роботи: Поповнення простору
Література: [2] с.53-56. [4] с. 53-64, [8] с. 9-15.

Тема 3. Принцип стискаючих відображень.
Принцип стискаючих відображень.
Найпростіші застосування
Застосування принципу стискаючих відображень до диференціальних рівнянь
Завдання до самостійної роботи: Застосування принципу стискаючих відображень до інтегральних рівнянь
Література: [2] с.29-53. [3] с. 33-46. [4] с. 64-82. [8] с. 15-25.

Тема 4. Нормовані лінійні простори.
Поняття лінійного простору
Означення і приклади нормованих просторів. Банахові простори.
Евклідові простори
Теорема Ріса-Фішера
Завдання до самостійної роботи: Ортогональні доповнення, пряма сума підпросторів
Література: [2] с.68-77, 83-86. [3] с. 63-80. [4.] с. 138-144. [10] с. 19-44. [8] с. 36-43.

Тема 5. Гільбертові простори.
Поняття Гільбертового простору. Приклади.
Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.
Нерівність Бесселя. Повні ортогональні системи
Завдання до самостійної роботи: Комплексні евклідові простори
Література: [2] с.86-91. [3] с. 80-83. [4] с. 145-165. [10] с. 45-47, 57-68. [8] с. 43-47

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. МІРА. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Тема 1. Поняття міри.
Міра елементарних множин.
Міра Лебега.
Властивості вимірних множин.
Завдання до самостійної роботи: Алгебри та σ- алгебри множин
Література: [10] с. 327 – 338, [12] с. 235 – 248, [11] с. 56-68.

Тема 2. Вимірні функції.

Поняття і основні властивості

Дії з вимірними функціями

Еквівалентність. Збіжність майже скрізь

Властивості вимірних функцій

Теореми Єгорова та Лузіна.

Збіжність за мірою

Завдання до самостійної роботи: Майже неперервні функції

Література: : [10] с. 338 – 341 ,385 – 388, [12] с. 264 – 273, [11] с. 86 – 103, 121 – 126.

Тема 3. Інтеграл Лебега

Побудова інтеграла Лебега

Гранчний перехід під знаком інтеграла Лебега

Порівняння з інтегралом Рімана

Завдання до самостійної роботи: Інтеграл Лебега на множині нескінченної міри

Література: [10] с. 341 – 349, [12] с.273 – 290, [11] с. 109 – 126.

Тема 4. Простори сумовних функцій

Означення і основні властивості простору L_1

Збіжність в середньому

Повнота простору L_1

Завдання до самостійної роботи: Добуток мір

Література: : [10] с. 372 – 373, [12] с. 351 – 355, [11] с. 129 – 142.

Тема 5. Простір L_2

Означення і основні властивості

Збіжність в середньому квадратичному та її зв'язок з іншими видами збіжності

Комплексний простір L_2

Тригонометрична система

Многочлени Лежандра

Інші ортогональні та ортонормовані системи системи

Завдання до самостійної роботи: Кратні ряди Фур'є

Література: : [10] с. 390 – 395, 432 – 442, [12] с. 356 – 379, [11] с. 154 – 172.

3.2 Результати навчання і їх розподіл за модулями

Формулювання спеціальних результатів із їх розподілом за модулями представлені нижче:

Модулі	Зміст програмного результату навчання
МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ	Здобувач вищої освіти здатен до: -знання та розуміння основних понять загальної теорії функцій; -знання методів, що відносяться до базових областей теорії метричних просторів, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах; -спеціалізованих концептуальних знань з теорії метричних просторів, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи; -побудові функціональних моделей, алгоритмізування розв'язування математичної задачі; -організації пошуку відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики, в тому числі з використанням іноземної мови;

Модулі	Зміст програмного результату навчання
	-уявлення про сучасний математичний апарат функціональних методів, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях; -усвідомлення необхідності подальшого навчання, систематичного підвищення професійної кваліфікації, пов'язаної із застосуванням методів теорії метричних просторів.
МІРА. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА	Здобувач вищої освіти здатний -знання та розуміння понять міри, вимірної функції; -знання методів, що відносяться до базових областей теорії міри та інтегралу Лебега, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах; -спеціалізованих концептуальних знань з теорії міри, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи; -побудові функціональних моделей, алгоритмізування розв’язування математичної задачі; -організації пошуку відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики, в тому числі з використанням іноземної мови; -уявлення про сучасний математичний апарат лінійних функціональних методів, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях; -усвідомлення необхідності подальшого навчання, систематичного підвищення професійної кваліфікації, пов'язаної із застосуванням методів теорії функцій.

4. СТРУКТУРА ТА ТЕХНОЛОГІЧНА КАРТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

4.1 Технологічна карта навчальної дисципліни

на 2 семестр Види занять		Всього	Навчальні тижні																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Аудиторні	Лекції	**18**	2		2		2		2		2		2		2		2		2	
	Практичні	**36**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Лабораторні																			
	Індивідуальні																			
	Поточ. контр.		+		+			+		+				+		+			+	
	Контр.роб.(ТО)				+						+							+		
	Модул. контр							М2												М1
	Захист курсов																			
	Захист лабор.																			
	Консультації																			
	Атестації										А1									А2
	Всього	**54**	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2
Самостійні	Курс. проект.																			
	Підгот. до зан	**81**	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
	Розрах.-граф.																			
	Консультації																			
	Екскурсії																			
	Всього	**81**	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
Навчальне навантаження студентів		**135**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**

Підсумковий контроль – екзамен

4.2 Розподіл часу за темами і модулями

№	Назва змістових модулів і тем	Кількість годин			
		Усього	В тому числі		
			Л	П(С)	СРС
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ					
1	**Тема 1.** Метричні простори. Збіжність. Означення і приклади метричних просторів. Неперервні відображення Збіжність. Кулі, обмежені множини, граничні точки. Відкриті та замкнені множини.	14	2	4	8
2	**Тема 2.** Повні метричні простори. Компактність	14	2	4	8

	Повнота і сепарабельність у метричних просторах. Поповнення метричних просторів. Компактні множини метричних просторів. Властивості неперервних функцій на компакті.				
3	**Тема 3.** Принцип стискаючих відображень. Принцип стискаючих відображень. Найпростіші застосування Застосування принципу стискаючих відображень до диференціальних рівнянь	14	2	4	8
4	**Тема 4.** Нормовані лінійні простори. Поняття лінійного простору Означення і приклади нормованих просторів. Банахові простори. Евклідові простори Теорема Ріса-Фішера	14	2	4	8
5	**Тема 5.** Гільбертові простори. Поняття Гільбертового простору. Приклади. Ряди Фур′є в гільбертовому просторі. Нерівність Бесселя. Повні ортогональні системи	11	1	2	8
6	**Разом М1**	**67**	**9**	**18**	**40**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. МІРА. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА					
7	**Тема 1.** Поняття міри. Міра елементарних множин. Міра Лебега. Властивості вимірних множин.	14	2	4	8
8	**Тема 2.** Вимірні функції. Поняття і основні властивості Дії з вимірними функціями Еквівалентність. Збіжність майже скрізь Властивості вимірних функцій Теореми Єгорова та Лузіна. Збіжність за мірою	14	2	4	8
9	**Тема 3.** Інтеграл Лебега Побудова інтеграла Лебега Гранчний перехід під знаком інтеграла Лебега Порівняння з інтегралом Рімана	14	2	4	8
10	**Тема 4**. Простори сумовних функцій Означення і основні властивості простору L_1 Збіжність в середньому Повнота простору L_1	14	2	4	8
11	**Тема 5.** Простір L_2 Означення і основні властивості Збіжність в середньому квадратичному та її зв’язок з іншими видами збіжності Комплексний простір L_2	12	1	2	9

	Тригонометрична система Многочлени Лежандра Інші ортогональні та ортонормовані системи системи				
12	**Разом М2**	**68**	**9**	**18**	**41**
13	**Разом за курс**	**135**	**18**	**36**	**81**

Л – лекції, П (С) – практичні (семінарські) заняття, СРС – самостійна робота студентів.

5. САМОСТІЙНА РОБОТА

Уміння студентів самостійно працювати над вивченням конкретного предмета – важливий чинник підвищення якості підготовки спеціалістів.

Самостійна робота студента (денна форма навчання) включає підготовку до практичних занять; самостійне опрацювання додаткової літератури та питань для самоконтролю засвоєння змісту навчального матеріалу, а також підготовку рефератів, есе, доповідей та самостійних домашніх (творчих) завдань за тематикою, що наведено у методичних вказівках до самостійної роботи – Режим доступу : http://www.dgma.donetsk.ua/metodichne-zabezpechennya-osvitno-profesiyna-programa-serednya-osvita-matematika.html

Враховуючи це, рекомендуються наступні **форми організації самостійної роботи студентів**:

– підготовка до практичних занять;

– самостійне опрацювання додаткової літератури до тем лекційного курсу і практичних (семінарських) занять, а також літератури для підготовки самостійного домашнього завдання;

– підготовка доповідей, рефератів та есе за тематикою лекцій і семінарів;

– самостійне опрацювання питань для самоконтролю засвоєння змісту лекційного матеріалу з курсу.

5.1 Перелік тем для самостійного вивчення

№ з\п	Підготовка до практичних занять та виконання самостійного домашнього завдання за теми	Кількість годин
1	Метричні простори. Збіжність.	9
2	Повні метричні простори. Компактність	9
3	Принцип стискаючих відображень.	9
4	Нормовані лінійні простори	9
5	Гільбертові простори.	9
6	Поняття міри	9
7	Вимірні функції	9
8	Інтеграл Лебега	9
9	Простори сумовних функцій	9
Разом за курс		**81**

5.2 Розрахунок часу для самостійної роботи студента за видами

№ з/п	Вид роботи	Кількість годин
1	Опрацювання програмного матеріалу, що викладається на лекціях	30
2	Підготовка до практичних занять	18

3	Виконання індивідуальних завдань (рефератів, творчих, розрахунково-графічних робіт, презентацій тощо)	15
4	Підготовка до контрольних заходів (модульна контрольна робота)	10
5	Підготовка самостійного домашнього завдання	8
	Разом	**81**

Самостійна робота виконується у відповідності до методичних вказівок до самостійної роботи студента.

6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Метою індивідуального завдання є ґрунтовне усвідомлення суттєвих властивостей основних понять курсу, закріплення основних теорем та формування практичних вмінь студентів.

Виконання індивідуального завдання передбачає розв’язання студентами задач з методичних посібників за наступними темами:

1 Метричні простори. Збіжність.
2 Повні метричні простори. Компактність
3 Принцип стискаючих відображень.
4 Нормовані лінійні простори
5 Гільбертові простори.
6 Поняття міри
7 Вимірні функції

7. МЕТОДИ НАВЧАННЯ

Під час викладання курсу використовуються наступні методи навчання:

– розповідь – для оповідної, описової форми розкриття навчального матеріалу;

– пояснення – для розкриття сутності певного явища, закону, процесу;

– бесіда – для усвідомлення за допомогою діалогу нових явищ, понять;

– ілюстрація – для розкриття предметів і процесів через їх символічне зображення (малюнки, схеми, графіки);

– практична робота – для використання набутих знань у розв’язанні практичних завдань;

– аналітичний метод – уявного або практичного розкладу цілого на частини з метою вивчення їх суттєвих ознак;

– індуктивний метод – для вивчення явищ від одиничного до загального;

– дедуктивний метод – для вивчення навчального матеріалу від загального до окремого, одиничного;

– проблемний виклад матеріалу – для створення проблемної ситуації.

8. МЕТОДИ КОНТРОЛЮ І ПИТАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ

Для визначення рівня засвоєння студентами навчального матеріалу використовують такі форми та методи контролю і оцінювання знань:

– оцінювання роботи студента під час практичних занять у вигляді усного опитування або виконання розрахункових завдань;

– написання підсумкових модульних контрольних та тестових робіт;

– оцінювання виконаного самостійного домашнього завдання та його захисту;

– складання екзамену.

Оцінку знань студентів з дисципліни «Теорія функцій» здійснюють відповідно до положення ДДМА про організацію навчального процесу. Ця система базується на здійсненні наскрізного поточного контролю на аудиторному занятті у відповідності до його форми (лекційної, практичної).

Підсумковою оцінкою поточного контролю є оцінка за модуль, тобто реалізується принцип модульного обліку знань студентів.

Навчальним планом з дисципліни передбачено складання екзамену. Для оцінювання знань використовують стобальну шкалу оцінювання ECTS.

Порядок здійснення поточного оцінювання знань студентів.

Поточне оцінювання знань студентів здійснюється під час проведення лекційних і практичних занять і має на меті перевірку рівня підготовленості студента до виконання конкретної роботи. Об’єктами поточного контролю є:

- активність та результативність роботи студента протягом семестру над вивченням програмного матеріалу дисципліни, відвідування занять;
- виконання завдань на практичних заняттях;
- виконання завдань поточного контролю.

Робота студентів на лекціях та практичних заняттях оцінюється за 100-бальною системою. При оцінюванні виконання практичних завдань увага приділяється їх якості й самостійності.

Контроль виконання самостійного домашнього завдання передбачає виявлення опанування студентом матеріалу лекційного модуля та вміння застосувати його для вирішення практичної ситуації і проводиться у вигляді захисту самостійного домашнього завдання.

Проведення підсумкового контролю.

Екзамен здійснюється в письмовій формі за контрольними питаннями, які сформовані у екзаменаційному білети, що дають можливість здійснити оцінювання знань студента з усієї дисципліни.

Відповіді за екзаменаційними білетами оцінюються за 100-бальною системою.

Порядок виставлення оцінки за семестр

Оцінка за семестр обчислюється як середнє арифметичне (вагові коефіцієнти однакові 0,5) з результатів поточного оцінювання і підсумкового контролю.

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

1 Метричні простори. Збіжність.
2 Повні метричні простори. Компактність
3 Принцип стискаючих відображень.
4 Нормовані лінійні простори
5 Гільбертові простори.
6 Поняття міри
7 Вимірні функції
8 Інтеграл Лебега
9 Простори сумовних функцій
10 Ортогональні системи

9. РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

Вид контрольного заходу	Бали		За семестр	До 1-й атестації
	max	max		
Контрольна робота 1	10	20	20	50

Контрольна робота 2	15	30	30	–
Контрольна робота 3	30	50	50	–
Разом за семестр	55	100	100	–
Екзамен	55	100	100	–
Разом (з урахуванням вагових коефіцієнтів)	55	100	100	–

Зразки модульних контролів та зразки розв'язань знаходяться у додатках А і Б відповідно.

За участь у науковій роботі, участь в олімпіадах і конкурсах студенту можуть призначатися додаткові бали до загального рейтингу за рішенням адміністрації факультету.

Шкала оцінювання

<table>
<tr><th rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</th><th colspan="2">Оцінка за національною шкалою</th></tr>
<tr><th>для екзамену, курсового проекту (роботи), практики</th><th>для заліку</th></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>74-81</td></tr>
<tr><td>64-73</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td></tr>
</table>

10. РЕКОМЕНДОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

Базові

1. Швець В. Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної Одеса. Видавництво БМВ, 2014 - 284 с
2. Balakrishnan A.V. Applied Functional Analysis Springer-Verlag, 1981. - 373 p.
3. Abramovich Y., Avgerinos E., Yannelis N.C. (eds.) Functional Analysis and Economic Theory Springer, 1998. — 300 p.
4. Теорія функцій комплексної змінної: / Уклад.: Є. В. Массалітіна, О. О. Кільчинський. – К.: НТУУ „КПІ”, 2008. – 54 с.

Методичне забезпечення

1. Ровенська, О.Г. Функціональний аналіз : навч. посіб. / О. Г. Ровенська. – Краматорськ : ДДМА, 2021.
2. Буланов, Г. С. Функціональний аналіз : навч. посіб. / Г. С. Буланов, О. Г. Ровенська, В. М. Астахов. – Краматорськ : ДДМА, 2017. – 63 с.

3. Ровенська, О.Г. Функціональний аналіз: методичні вказівки до семінарських занять та самостійної роботи для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика) – Краматорськ : ДДМА, 2021.

Web-ресурси

1. Moodle. http://www.dgma.donetsk.ua/golovna.html
2. Khan Academy https://uk.khanacademy.org
3. CoCalc https://cocalc.com

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **2** Навчальна дисципліна **«Теорія функцій»** Спеціальність 014

М1. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Білет № 1

Завдання 1. Задані множини

$$A = \{10\}, B = \{10,15\}, C = \{5,10,15\}.$$

Визначити входження однієї множини в іншу.

Завдання 2. Обчислити норму елемента

$$x(t) = 2t - t^2 + 1$$

у просторі $C_{[-1;2]}$.

Завдання 3. Обчислити скалярний добуток елементів

$$f(t) = t \text{ і} g(t) = \frac{1}{t^2}$$

у просторі $C_{2[1,3]}$.

Завдання 4. Довести, що функція на множині R

$$\rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$$

є метрикою.

Завдання 5. Знайти границю послідовності

$$\{x_n\} = \{\frac{1}{n^2}\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \}.$$

Завідувачка кафедри Власенко К.В.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Критерії оцінювання. Завдання 1-5 оцінюються у 10 балів кожне. Максимальна оцінка за завдання може бути виставлена при виконанні таких умов: повний аналіз умови, постановка математичної моделі, правильні обчислення, повнота висновків, аналіз результату.

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **2** Навчальна дисципліна **«Теорія функцій»** Спеціальність 014

М2. МІРА. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Білет № 1

Завдання 1. Обчислити норму функціонала

$$f(x) = x(1) - 2x(2),$$

заданого у просторі $C_{[0,2]}$.

Завдання 2. Знайти міру зазначених множин на прямій

1. $[0; 2]$.

2. $[0; 2)$.

Завдання 3. Довести, що функція $y = f(x)$, $x \in R$вимірна за Лебегом на R, якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4}.$$

Завдання 4. Знайти доповнення до множини натуральних парних чисел.

$$A = \{x: x + 2k, k \in N\},$$

Завдання 5. Довести, що функція $y = f(x)$, $x \in R$вимірна за Лебегом на R, якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos x}$$

Завідувачка кафедри Власенко К.В.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Критерії оцінювання. Завдання 1-5 оцінюються у 10 балів кожне. Максимальна оцінка за завдання може бути виставлена при виконанні таких умов: повний аналіз умови, постановка математичної моделі, правильні обчислення, повнота висновків, аналіз результату.

М1. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Завдання 1. Задані множини

$$A = \{10\}, B = \{10,15\}, C = \{5,10,15\}.$$

Визначити входження однієї множини в іншу.
Розв'язання.

$A \in B, C \in A, C \in B.$

Завдання 2. Обчислити норму елемента

$$x(t) = 2t - t^2 + 1$$

у просторі $C_{[-1;2]}$.
Розв'язання.

$$\|x\| = \max_{-1 \le t \le 2} |x(t)| = \max_{-1 \le t \le 2} |2t - t^2 + 1| = 2.$$

Завдання 3. Обчислити скалярний добуток елементів

$$f(t) = t \text{ і} g(t) = \frac{1}{t^2}$$

у просторі $C_{2[1,3]}$.
Розв'язання.

$$(f, g) = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{t^2} \mathrm{dt} = \int_1^3 \frac{1}{t} \mathrm{dt} = \ln|t||_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3.$$

Завдання 4. Довести, що функція на множині R

$$\rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$$

є метрикою.
Розв'язання.
Перевіримо виконання аксіом метрики.
1. $x = y, \rho(x, y) = \min\{1, |x - x|\} = 0.$
2. $\rho(x, y) = \min\{1, |x - y|\} = \min\{1, |y - x|\} = \rho(y, x),$
3. $\rho(x, z) = \min\{1, |x - z|\} = \min\{1, |x - y + y - z|\} \le \rho(x, y) + \rho(y, z).$
Всі аксіоми виконуються, функція є метрикою.
Завдання 5. Знайти границю послідовності

$$\{x_n\} = \{\frac{1}{n^2}\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \}.$$

Розв'язання.
Доведемо за означенням, що число 0 є границею цієї послідовності.

$$\rho(0, x_N) < \varepsilon,$$
$$\rho(0, x_N) = |0 - x_N| < \varepsilon => |x_N < \varepsilon|,$$
$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$
$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon},$$
$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, N = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}].$$

Наприклад, якщо $\varepsilon = 100$, то $N = 10$.

M2. МІРА. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Завдання 1. Обчислити норму функціонала

$$f(x) = x(1) - 2x(2),$$

заданого у просторі $C_{[0,2]}$.
Розв'язання.

$$|x(1)| + 2|x(2)| \leq 3 \max_{0 \leq x \leq 2} |x| = 3\|x\|.$$

Припустимо, що $\|f\| = 3$.

$$\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C_{[0,2]}}} = \frac{|x(1) - 2x(2)|}{\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)|},$$
$$\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)| = 1.$$

Оберемо неперервну функцію $x(t)$, так щоб, $\max_{0 \leq x \leq 2} |x(t)| = 1$. Отже $\|f\| = 3$– норма функціонала.

Завдання 2. Знайти міру зазначених множин на прямій

1. $[0; 2]$.

2. $[0; 2)$.

Розв'язання.

1. $m[0; 2] = 2$.
2. $m(0; 2] = 2$.

Завдання 3. Довести, що функція $y = f(x)$, $x \in R$вимірна за Лебегом на R, якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4}.$$

Розв'язання. Для вимірності функції $f(x)$необхідно і достатньо, щоб її можна було подати у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих, вимірних функцій.
Члени розглянутого ряду неперервні функції на R, тому вимірні за Лебегом. Оскільки

$$f(x) \sim \frac{x}{n^4},$$

то заданий ряд є еквівалентним ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4},$$

який збігається. Отже, тому сума ряду є вимірною за Лебегом.

Завдання 4. Знайти доповнення до множини натуральних парних чисел.

$$A = \{x: x + 2k, k \in N\},$$

Розв'язання.

$$N/A = \{x: x = 2k + 1, k \in N\}.$$

Завдання 5. Довести, що функція $y = f(x)$, $x \in R$вимірна за Лебегом на R, якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos x}$$

Розв'язання.

Члени розглянутого ряду є неперервнми функціями на R. Розглянемо ряд, у якого

$$u_n = \frac{1}{n+\cos x},$$

$$u_2 = \frac{1}{2+\cos x} > u_3 = \frac{1}{3+\cos x} > u_4 = \frac{1}{4+\cos x} > \dots >,$$

Отже, заданий ряд також збігається. Тому сума ряду є вимірною за Лебегом.